

# Modelización hidrodinámica del flujo sobre diques de materiales sueltos

## *Hydrodynamic modelling of overtopping flow over granular dikes*

Cantero-Chinchilla, F.N. <sup>a</sup>, Bergillos, R.J. <sup>b1</sup>, y Castro-Orgaz, O. <sup>b2</sup>

<sup>a</sup>Grupo de Agronomía, Instituto de Agricultura Sostenible, CSIC, Avenida Menéndez Pidal s/n, Campus Alameda del Obispo, 14004, Córdoba, España. E-mail: fncantero@ias.csic.es

<sup>b</sup>Área de Ingeniería Hidráulica, Departamento de Agronomía, Cta Nacional IV, km 396, Edificio Da Vinci, Campus de Rabanales, 14071, Universidad de Córdoba. Córdoba, España. E-mail: <sup>b1</sup> rafael.bergillos@uco.es, <sup>b2</sup> ag2caoro@uco.es

Recibido: 15/05/2019

Aceptado: 22/06/2019

Publicado: 31/07/2019

**Citar como:** Cantero-Chinchilla, F.N., Bergillos, R.J., y Castro-Orgaz, O. (2019). Hydrodynamic modelling of overtopping flow over granular dikes. *Ingeniería del agua*, 23(3), 215-227. <https://doi.org/10.4995/ia.2019.12085>

---

## RESUMEN

Este trabajo presenta un análisis comparativo entre los últimos avances en el modelado promediado de flujos sobre diques de materiales sueltos. Entre los modelos más relevantes se encuentran: (i) modelos no hidrostáticos con transporte de sedimentos, (ii) modelos hidrostáticos con transporte de sedimentos y movimiento dinámico granular y (iii) modelos hidrostáticos con transporte de sedimentos por carga de fondo. Los tres tipos de modelos son comparados con datos experimentales para discutir su aplicabilidad. Mientras que el modelo hidrostático con transporte de sedimentos por carga de fondo presenta una solución adecuada en términos generales, el modelo no hidrostático permite mejorar la predicción del flujo en la cresta del dique, mientras que el modelo con movimiento granular dinámico permite mejorar las predicciones cerca del pie del dique. Por último, se discuten las limitaciones de los modelos.

**Palabras clave** | Modelos promediados; transporte de sedimentos; flujo hidrostático; flujo no hidrostático; ecuaciones de Savage-Hutter.

---

## ABSTRACT

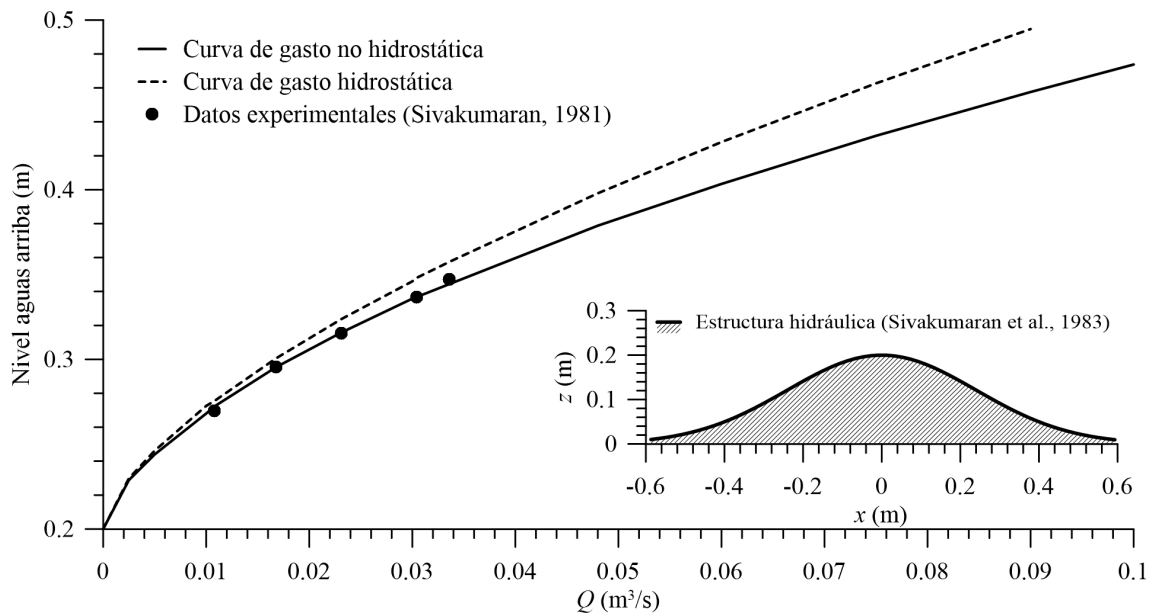
*This paper presents a comparative analysis of the last advances in depth-averaged modelling of overtopping flow over granular dikes. Among the most relevant models in this field, three families of models are described: (i) non-hydrostatic models with sediment transport, (ii) hydrostatic models with sediment transport and dynamic granular beds, and (iii) hydrostatic models with sediment transport as bed-load. To study their suitability, examples of the three families of models are compared using experimental data of dike overtopping. Whilst the hydrostatic model with bed-load sediment transport shows a fair agreement with the experimental data, the results by the non-hydrostatic model produces a more accurate free surface profile up to the dike crest domain. The results by the hydrostatic model assuming dynamic bed deformation enhances the predictions near the dike toe downstream. Finally, the limitations of the models are discussed.*

**Key words** | *depth-averaged models; sediment transport; dike overtopping; granular dikes; non-hydrostatic flow, Savage-Hutter equations.*

## INTRODUCCIÓN

El estudio de la interacción del flujo en canales o ríos con las estructuras hidráulicas es crucial para conocer y predecir con detalle las consecuencias de eventos extremos. Los diques de materiales sueltos son una de las estructuras artificiales más comunes en entornos fluviales, ya que generalmente constituyen una opción económica para la contención de volúmenes de fluido en minería, balsas para riego y embalses para abastecimiento, entre otros. Sin embargo, la rotura de estas estructuras por vertido por coronación implica consecuencias de mayor impacto debido al arrastre de sedimentos y/o materiales embalsados. Un ejemplo reciente de rotura de dique se produjo en enero de 2019 en Brumadinho (Belo Horizonte, Brasil), donde una presa de residuos mineros colapsó por vertido por coronación, provocando un flujo de tipo avalancha con intensa carga de sedimentos, dejando a su paso más de 300 personas desaparecidas o muertas (BBC, 2019).

La modelización hidrodinámica de estos flujos permite evaluar posibles escenarios de riesgo. Los modelos hidrostáticos promediados verticalmente, comúnmente conocidos como modelos tipo Saint-Venant (Chaudhry, 2008), constituyen el grupo más representativo entre los modelos empleados para este fin debido a su reducido coste computacional (Pontillo et al., 2010; Schmocker, 2011; van Emelen, 2014). Sin embargo, las hipótesis adoptadas en estos modelos no permiten una estimación precisa del flujo sobre estructuras hidráulicas, dado que se generan importantes gradientes de velocidad vertical (Castro-Orgaz y Hager, 2017). En esos casos, es preciso recurrir a ecuaciones de orden superior que incorporan una distribución de la presión no hidrostática en la vertical, como las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi (Serre, 1953; Green y Naghdi, 1976). De esta forma, la curvatura del flujo es correctamente aproximada, dando lugar a niveles de agua más bajos y realistas aguas arriba del dique, los cuales afectan directamente a la estimación del gasto (Figura 1). Cantero-Chinchilla et al. (2018) desarrollaron un modelo unidimensional no hidrostático para el flujo sobre diques de materiales sueltos, resultando una estimación más correcta de los perfiles de agua y sedimento.



**Figura 1** | Comparativa entre curvas de gasto con simulación unidimensional hidrostática y no hidrostática sobre estructura hidráulica de perfil Gaussiano realizada por Sivakumaran et al. (1983) usando los datos experimentales de Sivakumaran (1981).

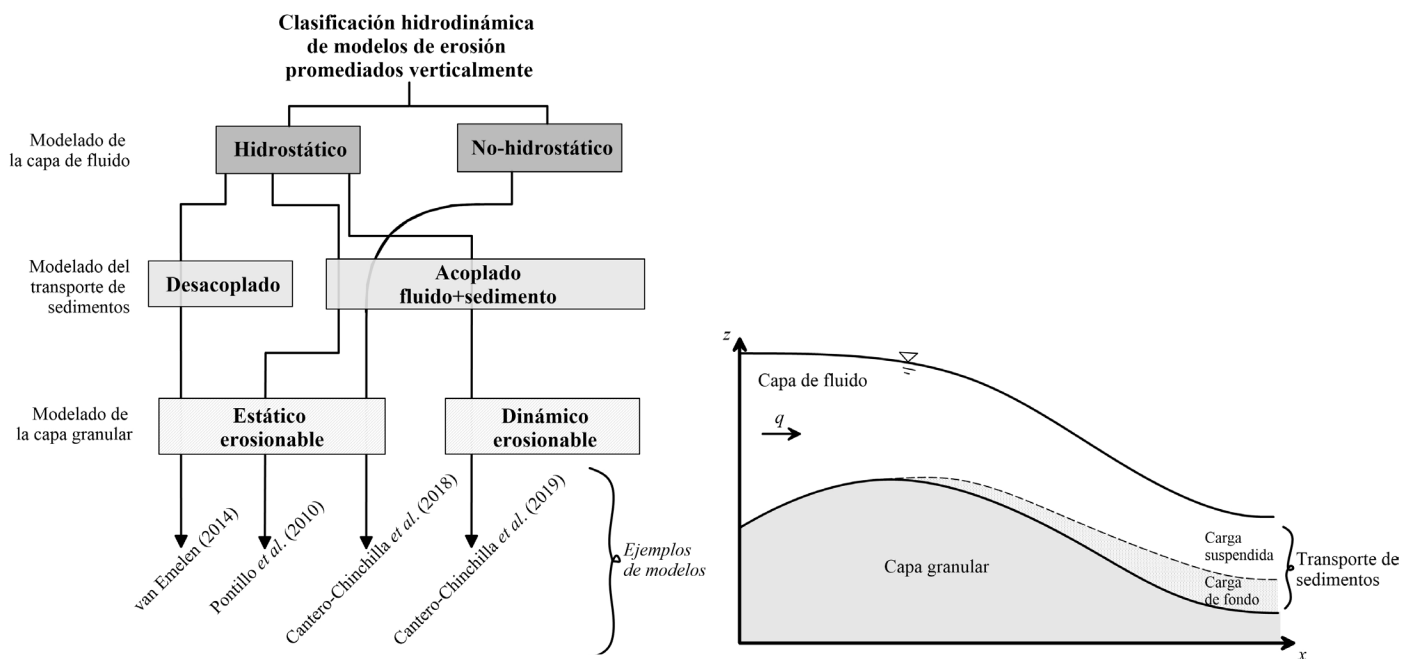
El flujo de vertido sobre la coronación de diques de materiales sueltos da lugar a diversos procesos que intervienen en el fallo o colapso del mismo. La aceleración del flujo en coronación provoca un intenso arrastre de sedimentos que produce un transporte y depósito elevado aguas abajo del dique. Cantero-Chinchilla et al. (2018) evaluaron el transporte de sedimentos en roturas de diques por vertido sobre coronación mediante el uso de un modelo no hidrostático de transporte de sedimentos. Mediante la simulación con el modelo se observó que la aceleración del flujo en el pie de talud aguas abajo produce elevadas sobrepresiones, resultando una sobre-erosión del material del fondo. Los autores concluyeron que el modelo fallaba al reproducir la interacción del

flujo erosivo no hidrostático con otros fenómenos del colapso que podían estar presentes cerca de este pie de talud. Mecanismos de colapso como deslizamientos y fluidificación en el cuerpo del dique, son frecuentes cuando la red de filtración alcanza el talud aguas abajo. Además, la redistribución del material por motivos de estabilidad modifica el transporte de sedimentos aguas abajo del dique, donde la erosión es más intensa. En este sentido, el movimiento de masas granulares se puede aproximar mediante el uso de las ecuaciones de Savage y Hutter (1989), que son la generalización de las ecuaciones de Saint-Venant a flujos granulares. Cantero-Chinchilla et al. (2019) han desarrollado una aplicación unidimensional de las ecuaciones de Savage-Hutter junto con las ecuaciones de Saint-Venant para la modelización del movimiento de la capa de sedimentos del dique y del flujo por coronación, respectivamente. Los resultados permiten concluir que existe una mejora en los modelos predictivos mediante el modelado conjunto de ambos flujos y su interacción.

Este trabajo presenta una revisión de la modelización de flujos de coronación sobre diques de materiales sueltos. En primer lugar, se muestra el modelo hidrostático con carga de fondo por van Emelen (2014) como referencia para el trabajo comparativo. En segundo lugar, se introduce el modelo erosivo no hidrostático presentado por Cantero-Chinchilla et al. (2018). Posteriormente, se resume el modelo hidrostático de dos capas para flujo granular y de agua desarrollado por Cantero-Chinchilla et al. (2019). Por último, se realiza una aplicación comparativa de los modelos dando lugar a una discusión y conclusiones sobre el estado del arte en la investigación en este campo.

## MODELOS HIDRODINÁMICOS DE EROSIÓN

Desde una perspectiva física del modelado promediado vertical de flujos agua-sedimento, los modelos hidrodinámicos de erosión disponibles en la literatura se pueden agrupar en tres bloques: (i) modelos hidrostáticos con transporte de sedimentos por carga de fondo, (ii) modelos hidrostáticos con transporte de sedimentos acoplados y modelado dinámico del movimiento de la masa granular y (iii) modelos no hidrostáticos con transporte de sedimentos acoplados (Figura 2). A continuación, se presentan ejemplos para estas familias de modelos.



**Figura 2** | Clasificación de modelos hidrodinámicos de erosión.

## Modelos hidrostáticos con transporte de sedimentos por carga de fondo

Este tipo de modelos usa las ecuaciones de Saint-Venant para modelar el flujo de agua clara sobre un lecho erosionable. El transporte de sedimentos se modela, normalmente, a través de fórmulas de equilibrio para la carga de fondo, que permiten actualizar el nivel del lecho en función de las tasas de erosión que, a su vez, están condicionadas por el campo de velocidades, van Emelen (2014) presentó un modelo en el que se usan las ecuaciones de Saint-Venant junto con la ecuación de Exner para la actualización del nivel del lecho. En forma conservativa, el sistema de ecuaciones presentado por van Emelen (2014) se puede expresar como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (1)$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ q \\ z_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial t} - \frac{\tau_b}{\rho} \\ -\frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\partial q_{b*}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

donde  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{S}$  son los vectores de variables del flujo, flujos y términos fuente, respectivamente,  $h$  es el calado,  $q$  es el caudal por unidad de ancho,  $z_b$  es el nivel del lecho (en la dirección  $z$ ),  $\tau_b$  es la tensión de corte en el fondo,  $q_{b*}$  es la carga de fondo en condiciones de equilibrio,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\rho$  es la densidad de fluido y  $\varepsilon$  es la porosidad del material del lecho. En el modelo presentado por van Emelen (2014), la ecuación de carga de fondo de Meyer-Peter y Müller (1948) se usa para calcular la carga de fondo en condiciones de equilibrio:

$$q_{b*} = 8 \left[ \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) g d^3 \right]^{1/2} \left[ \frac{\tau_b}{(\rho_s - \rho) g d} - 0.047 \right]^{3/2}, \quad (3)$$

donde  $\rho_s$  y  $d$  son la densidad y el diámetro de las partículas de sedimento, respectivamente. El esfuerzo de corte  $\tau_b$  es normalmente calculado usando el factor de fricción de Manning para flujo uniforme gradualmente variado a partir de la siguiente expresión:

$$\tau_b = \rho g \frac{n^2 q^2}{h^{7/3}}. \quad (4)$$

Este tipo de modelado se aplica de forma frecuente para cálculos ingenieriles (Bladé et al. 2014; Cea y Bladé, 2015).

## Modelos hidrostáticos con transporte de sedimentos y modelado dinámico de la masa granular

El transporte de sedimentos no solamente se puede presentar en forma de carga de fondo, como considera el modelo de van Emelen (2014), sino también como carga suspendida. De este modo, la densidad del flujo, mezcla de agua y sedimento, sufre variaciones que tienen un impacto sobre la dinámica del fluido. Las ecuaciones de gobierno para modelos promediados que consideran ambas formas de transporte de sedimentos cambian sustancialmente con respecto a los modelos de agua clara. Tras el proceso matemático de promediado vertical sobre las ecuaciones RANS, nuevos términos fuente surgen para modelar esta interacción agua-sedimento. Cantero-Chinchilla et al. (2019) presentan un modelo hidrostático de transporte de sedimentos en no-equilibrio, es decir, donde la capacidad de transporte actual del flujo cambia en espacio y tiempo, no siendo igual a la de equilibrio. Además, este modelo incluye un módulo dinámico acoplado para el movimiento del cuerpo del dique, que permite calcular desplazamientos en la capa granular a través de las ecuaciones de Savage-Hutter (Castro-Organ y Hager, 2017). En este modelo en forma conservativa (Ecuación 1), los vectores de variables, flujos y términos fuente son (Cantero-Chinchilla et al., 2019):

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ q \\ h_c \\ q_c \\ h C_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \\ q_c \\ \frac{q_c^2}{h_c} + g K \frac{h_c^2}{2} \\ q C_t \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$S = \left[ \begin{array}{c} \frac{\rho_b}{\rho} \frac{\psi}{1-\varepsilon} \left[ 1 + \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \psi \\ \left\{ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{gh^2}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + U_c \frac{\rho_b}{\rho_m} \frac{\psi}{1-\varepsilon} \left[ 1 + \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{\tau_b}{\rho_m} - \frac{\rho_s - \rho}{\rho_m} \psi U \right. \\ \left. + \frac{\rho_s - \rho}{\rho_m} \left[ \frac{\rho_b}{\rho_w} \frac{\psi}{1-\varepsilon} \left[ 1 + \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \psi \right] UC_t \right\} \\ - \frac{\psi}{1-\varepsilon} \left[ 1 + \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \\ -g \frac{U_c}{|U_c|} \left( \frac{\rho_m}{\rho_b} h + h_c \right) \tan \phi_{bed} \cos \theta - \frac{\tau_b}{\rho_b} - U_c \frac{\psi}{1-\varepsilon} \left[ 1 + \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \end{array} \right] \psi \quad (6)$$

donde  $h_c$  es el espesor de la capa granular,  $q_c$  es el caudal en la capa granular,  $C_t$  es la concentración total volumétrica en la mezcla (fondo más suspendida),  $U_c$  es la velocidad promediada en la capa granular,  $U$  es la velocidad promediada en el flujo de agua-sedimento,  $K$  es el coeficiente de presión en la capa granular [=f( $K_{act}$ ,  $K_{pas}$ ,  $F$ ,  $\phi_{bed}$ ,  $\phi_{int}$ ) donde  $K_{act}$  y  $K_{pas}$  son los coeficientes de presión activo y pasivo respectivamente,  $F$  es el número de Froude en la capa granular,  $\phi_{bed}$  es el ángulo de fricción basal y  $\phi_{int}$  es el ángulo de fricción interna del material],  $\rho_m$  es la densidad de la mezcla agua-sedimento,  $\rho_b$  es la densidad de la mezcla cerca del lecho y  $\psi$  es el ratio neto de intercambio de sedimento con el lecho (deposito/erosión). El modelo, definido por el sistema de ecuaciones (1)-(5)-(6), usa las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en la horizontal para la capa de fluido mezcla agua-sedimento, las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en la horizontal para la capa granular, y la ecuación de continuidad de la masa de sedimento transportada.

El modelo de las Ecuaciones (1), (5) y (6) (Cantero-Chinchilla et al., 2019) usa el concepto de carga total (carga de fondo más carga suspendida) para el cálculo del transporte de sedimentos. Siendo así,  $\psi$  se define como:

$$\psi = \frac{q_{t^*} - q_t}{L} \quad (7)$$

$$L = \max[L_{bl}, L_{sl}] = \max\left[L_{bl}, \frac{U}{\alpha \omega_s}\right] \quad (8)$$

$$q_{t^*} = q_{bl^*} + q_{sl^*} \quad (9)$$

$$q_{bl^*} = 0.0053 \left[ \left( \frac{\rho_s}{\rho_w} - 1 \right) g d^3 \right]^{1/2} \left[ \left( \frac{n'}{n_b} \right)^{3/2} \frac{\tau_b}{\tau_c} - 1 \right]^{2.2} \quad (10)$$

$$q_{sl^*} = 0.0000262 \left[ \left( \frac{\rho_s}{\rho_w} - 1 \right) g d^3 \right]^{1/2} \left[ \left( \frac{\tau}{\tau_c} - 1 \right) \frac{U}{\omega_s} \right]^{1.74} \quad (11)$$

donde  $q_{t^*}$  es la carga total de sedimentos transportados en condiciones de equilibrio,  $q_t$  es la carga de sedimento transportado actual (=  $qC_t$ ),  $L$  es la longitud de adaptación para las condiciones de no equilibrio en carga total,  $L_{bl}$  es la longitud de adaptación para la carga de fondo,  $L_{sl}$  es la longitud de adaptación para la carga suspendida,  $\omega_s$  es la velocidad de sedimentación de las partículas suspendidas,  $\alpha$  es el coeficiente de adaptación para la carga suspendida en condiciones de no equilibrio (Wu, 2008),  $q_{bl^*}$  y  $q_{sl^*}$  son los ratios de carga de fondo y suspendida, respectivamente (Wu, 2008),  $n'$  es el coeficiente de rugosidad de Manning por los granos en el lecho móvil (=  $d^{1/6}/20$ ),  $n_b$  es el coeficiente de rugosidad de Manning para el fondo del canal (=  $d^{1/6}/21.1$ ) y  $\tau_c$  es el esfuerzo de corte crítico para la movilidad del sedimento (Wu, 2008).

### Modelos no hidrostáticos con transporte de sedimentos

Los modelos de esta familia usan una hipótesis de orden superior para las presiones en la capa de fluido. Cantero-Chinchilla et al. (2018) presentaron un modelo no hidrostático para flujos erosivos sobre diques de materiales sueltos que calcula el transporte de sedimentos de forma diferenciada entre carga suspendida y carga de fondo. Las presiones dinámicas se tienen en

cuenta tras considerar la ecuación de la cantidad de movimiento en la vertical. En este modelo en forma conservativa [Ecuación (10)], los vectores de variables, flujos y términos fuente son (Cantero-Chinchilla et al., 2018):

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ q \\ hW \\ hC_s \\ q_b/U \\ z_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \\ qW \\ qC_s \\ q_b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\varepsilon} \left( E - D + \frac{q_{b^*} - q_b}{L} \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\tau_b}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{hp_1}{2} \right) - \frac{1}{2} g \frac{h^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ - \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho} U \left( 1 - \frac{C_s}{1-\varepsilon} \right) \left( E - D + \frac{q_{b^*} - q_b}{L} \right) \end{array} \right\} \\ \frac{p_1}{\rho} - \frac{\tau_b}{\rho} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho} W \left( 1 - \frac{C_s}{1-\varepsilon} \right) \left( E - D + \frac{q_{b^*} - q_b}{L} \right) \\ E - D \\ \frac{q_{b^*} - q_b}{L} \\ \frac{1}{1-\varepsilon} \left( D - E + \frac{q_b - q_{b^*}}{L} \right) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

donde  $W$  es la componente vertical del campo de velocidades promediada,  $C_s$  es la concentración de la carga de sedimentos suspendida,  $q_{b^*}$  es la carga de fondo en condiciones de equilibrio [calculada mediante la ecuación (10)],  $q_b$  es la carga de fondo actual,  $E$  y  $D$  son los ratios de entrada y depósito de sedimento desde la capa de fondo al flujo (Wu, 2008), respectivamente, y  $p_1$  es la presión en el fondo en exceso de la hidrostática.

## ESQUEMAS NUMÉRICOS

Debido a la ausencia de soluciones analíticas de los sistemas de ecuaciones presentados en la sección anterior, se requiere el empleo de esquemas numéricos para su resolución. En este trabajo se aplican esquemas numéricos híbridos en volúmenes finitos – diferencias finitas para los tres modelos expuestos anteriormente, permitiendo su posterior comparación y análisis. Usando un esquema tipo Godunov (Toro, 2001), la solución de la ecuación (1) en un volumen finito  $i$  de dimensiones  $[-\Delta x/2, \Delta x/2] \times [t, t+\Delta t]$ , donde  $x$  es la coordenada horizontal,  $t$  es el tiempo,  $\Delta x$  es la distancia entre caras de la celda y  $\Delta t$  es el paso temporal, resulta en:

$$\mathbf{U}_i^{k+1} = \mathbf{U}_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}) + \Delta t \mathbf{S}_i, \quad (14)$$

donde  $k$  es el índice para el instante temporal e  $i \pm 1/2$  hace referencia a las interfaces entre volúmenes finitos. Para evaluar los flujos en las interfaces entre volúmenes finitos es necesario, previamente, reconstruir la solución del vector de variables en dichas interfaces. El término fuente se trata mediante un esquema centrado en diferencias finitas, con la excepción del componente gravitatorio, como se detalla seguidamente.

El modelo hidrostático con transporte de sedimentos y modelado dinámico de la capa granular implementado por Cantero-Chinchilla et al. (2019) se adopta en este trabajo como base de la comparativa con los otros dos modelos. Este modelo usa un esquema tipo *Upwind* de primer orden para la reconstrucción de las variables y posterior evaluación de los flujos. Los detalles sobre el esquema numérico al completo usado para este método pueden ser consultados en Cantero-Chinchilla et al. (2019). Para permitir la posterior comparación entre modelos, la reconstrucción de las variables en las interfaces para los otros dos modelos se lleva a cabo aplicando esquemas numéricos de resolución espacial de primer orden. Posteriormente, se determina el flujo numérico mediante el algoritmo HLLC para el problema de Riemann (Toro, 2001; 2009), que se aplica para evaluar los flujos en las interfaces. Además, para garantizar que no se producen errores numéricos durante la reconstrucción de variables, el calado  $h$  y el espesor de la capa granular  $h_c$  reciben un tratamiento especial durante la reconstrucción. A tal efecto, se aplica el método WSGDM (Aureli et al., 2008) para la reconstrucción de estos calados. Esta técnica realiza una media ponderada entre los valores de calado y superficie libre promediados.

Todas las derivadas parciales en los términos fuente de los tres modelos presentados anteriormente se discretizan usando diferencias finitas centradas de segundo orden. El esquema numérico debe cumplir la “propiedad-C” (Ricchiuto, 2010). Para ello, el término fuente gravitacional  $gh\partial z_b/\partial x$  en las ecuaciones (2) y (6) ha de ser evaluado en las interfaces entre volúmenes finitos. Aplicando una discretización por diferencias finitas centrada, este término se aproxima como:

$$gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \approx g \frac{h_{L,i+1/2} + h_{R,i-1/2}}{2} \frac{z_{bi+1/2} - z_{bi-1/2}}{\Delta x}, \quad (15)$$

donde los subíndices  $R$  y  $L$  hacen referencia a los valores por la derecha e izquierda, respectivamente, en cada interfaz.

La evolución temporal de la solución de los modelos expuestos en la sección anterior varía en función del carácter explícito o implícito de sus sistemas de ecuaciones. Los modelos planteados por las ecuaciones (1)–(4) y (1), (5)–(11) son explícitos, y usan la fórmula de Euler hacia adelante. El modelo dado por las ecuaciones (1), (12) y (13) usa la fórmula de Euler hacia atrás, y el sistema implícito que resulta se resuelve de forma iterativa mediante el método de Newton-Raphson, para obtener la solución de la variable  $p_1$ . Además, para asegurar la estabilidad de las soluciones, todos los modelos han de cumplir la condición de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL). Estos métodos de evolución temporal de la solución pueden ser consultados en detalle en Cantero-Chinchilla et al. (2018).

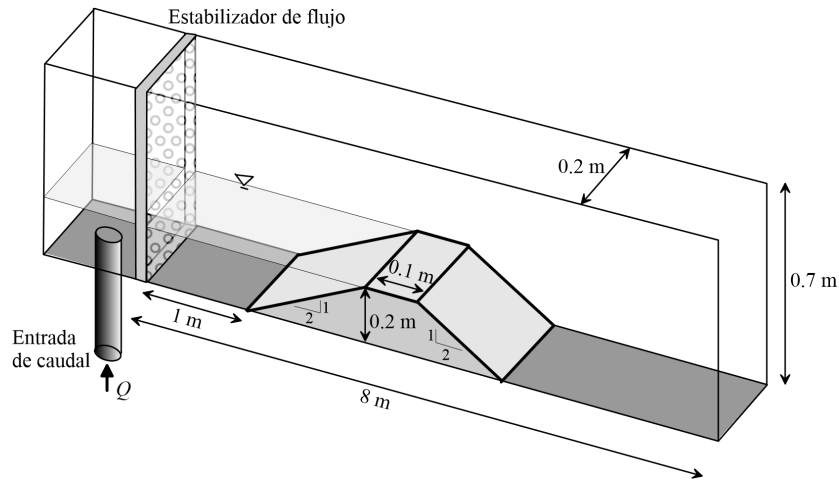
## APLICACIÓN, COMPARATIVA Y DISCUSIÓN

Los tres modelos presentados anteriormente han sido examinados previamente concluyendo su robustez e independencia del tamaño de paso de la malla, así como del paso temporal. Por lo tanto, en lo que sigue, los tres modelos se compararán entre sí usando los datos experimentales de flujo sobre diques de materiales sueltos proporcionados por Schmocker (2011), ampliamente usados y contrastados por la comunidad científica (Pontillo et al., 2010; Schmocker and Hager, 2012; Castro-Orgaz and Hager, 2013; Müller et al., 2016; Cantero-Chinchilla et al., 2018, 2019), en concreto los datos correspondientes al test 55. Las soluciones numéricas en este apartado se han generado usando  $\Delta x = 0.02$  m y  $CFL = 0.2$ .

### Test de aplicación

El test 55 en Schmocker (2011) se llevó a cabo en el Laboratorio de Hidráulica, Hidrología y Glaciología VAW del Instituto Federal Suizo de Tecnología, ETH Zurich, en un canal de 0.2 m de ancho, 8 m de largo y 0.7 m de alto en posición horizontal. El dique de materiales sueltos fue construido con sección trapezoidal, con taludes aguas arriba y aguas abajo 1V:2H, coronación horizontal de 0.1 m de longitud y altura de 0.2 m. El pie del talud aguas arriba se situó a 1 m de la entrada de flujo en el canal (Figura 3).





**Figura 3** | Esquema del Test 55 en Schmocker (2011).

El caudal constante empleado para generar la rotura del dique por vertido por coronación fue  $Q = 0.016 \text{ m}^3/\text{s}$ . Las características del sedimento empleado para hacer el dique fueron:  $\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$ ,  $d = 2 \text{ mm}$ ,  $\varepsilon = 0.31$  y  $n = 0.0168 \text{ sm}^{-1/3}$ . Nótese que el coeficiente de Manning es calculado como  $n = n_b = d^{1/6}/21.1$  (Wu, 2008) y, por tanto, se atribuye a las características del sedimento. Los parámetros experimentales usados en los tres modelos expuestos anteriormente se muestran en la Tabla 1.

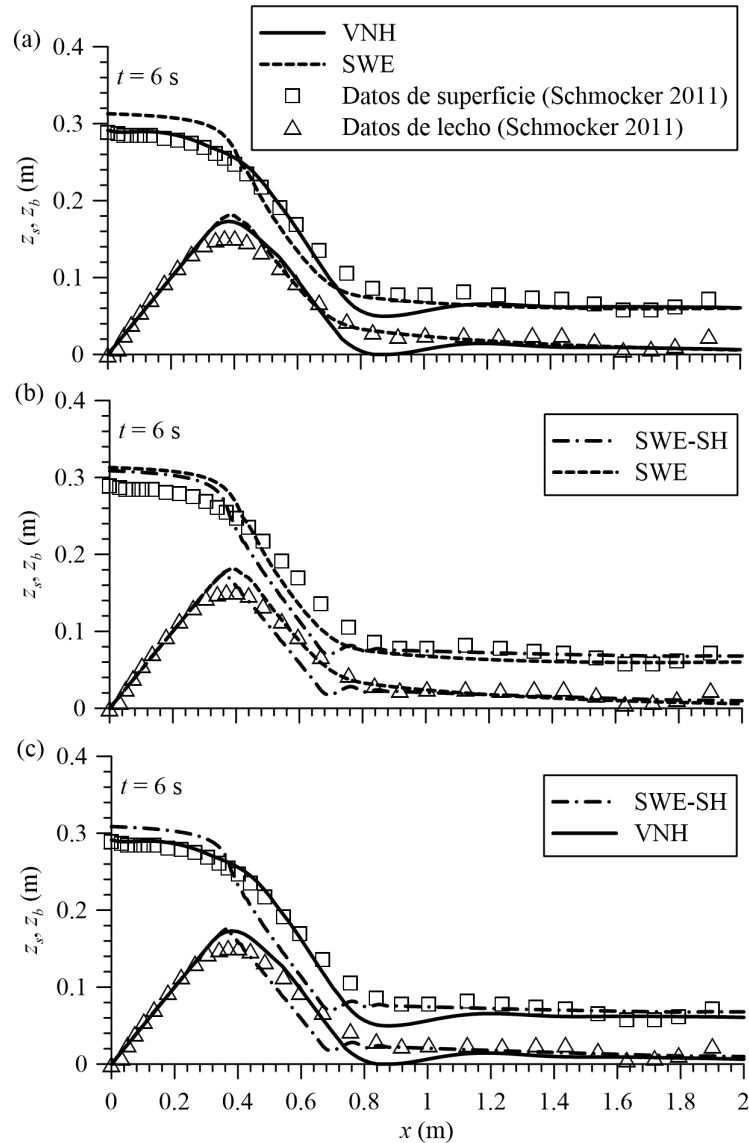
**Tabla 1** | Valores de los parámetros experimentales empleados en los tres modelos.

| Hidrostático con transporte de sedimentos por carga de fondo |        | Hidrostático con transporte de sedimentos y modelado dinámico de masa granular |        | No hidrostático con transporte de sedimentos |        |
|--|--------|--|--------|--|--------|
| $n \text{ (m}^{1/3}\text{s)}$                                | 0.0168 | $n \text{ (m}^{1/3}\text{s)}$  | 0.0168 | $n \text{ (m}^{1/3}\text{s)}$                | 0.0168 |
| $\varepsilon \text{ (-)}$                                    | 0.31   | $\varepsilon \text{ (-)}$  | 0.31   | $\varepsilon \text{ (-)}$                    | 0.31   |
| $\rho_s \text{ (kg/m}^3\text{)}$                             | 2650   | $\rho_s \text{ (kg/m}^3\text{)}$   | 2650   | $\rho_s \text{ (kg/m}^3\text{)}$             | 2650   |
| $d \text{ (m)}$  | 0.002  | $d \text{ (m)}$  | 0.002  | $d \text{ (m)}$                              | 0.002  |
|  |        | $K_{pas} \text{ (-)}$  | 1.507  |  |        |
|  |        | $K_{act} \text{ (-)}$  | 1.486  |  |        |
|  |        | $\phi_{bed} \text{ (}^\circ\text{)}$   | 26.5   |  |        |
|  |        | $\phi_{int} \text{ (}^\circ\text{)}$   | 26.5   |  |        |
|  |        | $L_{bl} \text{ (m)}$   | 0.01   |  |        |
|  |        | $\alpha \text{ (-)}$   | 5      |  |        |
|  |        | $\omega_s \text{ (m/s)}$   | 0.179  |  |        |
|  |        | $\rho_m \text{ (kg/m}^3\text{)}$   | 2136   |  |        |

## Predicción de niveles de superficie libre y lecho erosionado

La figura 3 presenta la comparativa de los resultados de tres modelos con los datos experimentales de erosión del dique en  $t = 6 \text{ s}$ . Para facilitar la comparativa, los resultados de los modelos son comparados dos a dos en varias subfiguras. La leyenda empleada para discernir entre modelos es: SWE para el modelo presentado por van Emelen (2014), VNH para el modelo presentado por Cantero-Chinchilla et al. (2018) y SWE-SH para el modelo presentado por Cantero-Chinchilla et al. (2019). Los acrónimos hacen referencia a las descripciones de estos modelos en inglés y pueden consultarse en sus trabajos de origen.





**Figura 4** | Comparativa dos a dos de las predicciones del nivel de superficie libre y de lecho por los modelos SWE, SWE-SH y VNH usando los datos experimentales del test 55 por Schomcker (2011) en el instante  $t = 6$  s.

El uso de estos modelos supone ciertas ventajas con respecto a modelos tridimensionales CFD (*Computational Fluid Dynamics*), como son la reducción del coste computacional y la versatilidad de obtener soluciones generales y de detalle usando un solo modelo compacto. Sin embargo, por separado, estos modelos presentan diferencias predictivas reseñables. El modelo VNH ofrece una mejora sustancial con respecto al modelo SWE de van Emelen (2014) en las predicciones de  $z_s$  y  $z_b$  cerca de la cresta (Figura 3a). Esta mejora predictiva viene propiciada principalmente por el modelado del transporte de sedimentos en no equilibrio como carga suspendida y de fondo, y por el tratamiento no hidrostático de las presiones. Mediante un estimador lineal de las presiones no hidrostáticas, donde  $p_1$  es el factor de perturbación, las subpresiones estimadas por el modelo VNH en el talud de aguas arriba y cerca de la cresta permiten estimar con precisión la curvatura superficial del flujo. Esta mejora también se observa en la predicción del perfil erosionado de la cresta. Sin embargo, la erosión en el pie del dique aguas abajo resulta mejor aproximada mediante el modelo SWE. El análisis de los resultados en la figura 3b indica que el modelo SWE-SH permite ajustar niveles más realistas de la cresta del dique debido al tratamiento dinámico de la capa granular frente al modelo SWE. Atendiendo a parámetros

de estabilidad de la masa granular, el modelo SWE-SH predice movimientos en el cuerpo del dique que permiten el reajuste del material. De este modo, se evitan situaciones irreales en las que el sedimento es reordenado de forma inestable, como sucede en la solución del modelo VNH (Figura 3c). No obstante, el modelo SWE, en comparación con los modelos SWE-SH y VNH, permite predecir el perfil erosionado del dique aguas abajo con mayor precisión con respecto a los datos experimentales.

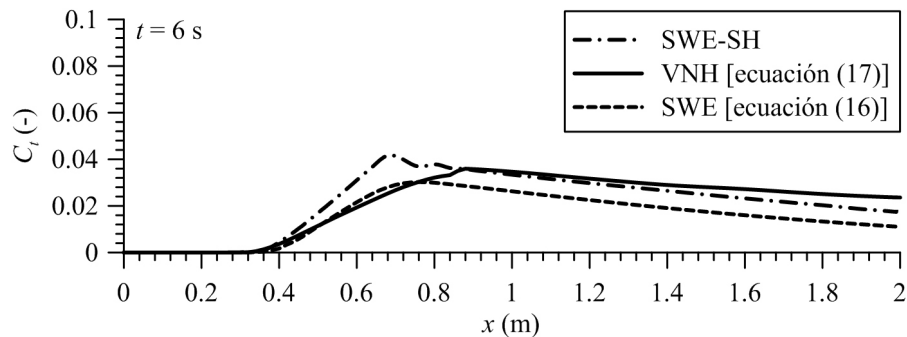
Aunque cabría pensar en una posible mejora predictiva del fenómeno a través del uso a trozos (tramificado) de los modelos, esta opción pierde validez debido a las disparidades en los módulos hidrodinámicos y de transporte de sedimentos usados por los tres modelos, que provocarían discontinuidades numéricas en los contornos modelo con modelo comprometiendo la calidad de la solución.

## Tasas de erosión

La figura 5 compara los perfiles instantáneos de concentración total volumétrica  $C_t$  estimados por los modelos SWE, VNH y SWE-SH en el instante de tiempo  $t = 6$  s. Mientras que  $C_t$  forma parte de las variables conservativas en el modelo SWE-SH, la estimación de la concentración total volumétrica en los modelos SWE y VNH se calcula, respectivamente, como

$$C_t = \frac{q_{b^*}}{hU}, \quad (16)$$

$$C_t = C_s + \frac{q_b}{hU}. \quad (17)$$



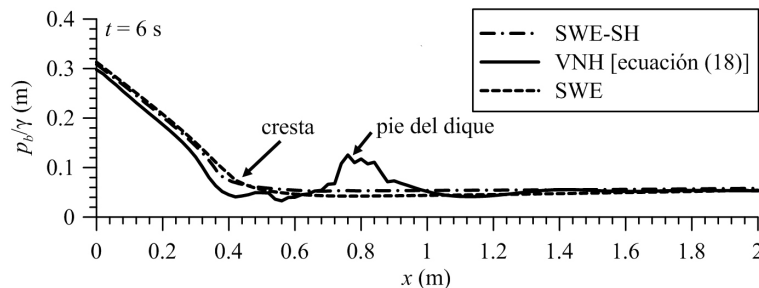
**Figura 5** | Comparativa de la estimación del nivel de concentración total volumétrica por los modelos SWE, SWE-SH y VNH para el test 55 de Schomcker (2011) en el instante  $t = 6$  s.

Se comprueba que el modelo SWE, que asume carga de fondo y desprecia la carga suspendida, predice concentraciones menores aguas abajo del perfil, que indican menores tasas de erosión. Los modelos SWE-SH y VNH, que implementan además el cálculo de la carga suspendida, predicen niveles más altos de concentración total del sedimento y, por tanto, tasas superiores de erosión. En especial, el modelo VNH produce tasas de erosión similares a las del modelo SWE en la pendiente aguas abajo del dique (hasta  $x \approx 0.75$  m), sin embargo para  $x > 0.75$  m las tasas de erosión son superiores. Esto produce un efecto negativo en la acumulación del sedimento al pie del dique, indicando la movilización del sedimento en esa zona justo antes de comenzar una tendencia descendente  $C_t$ . Nótese que la pendiente ascendente en  $C_t$  denota erosión mientras que la pendiente descendente denota depósito. En consecuencia, el modelo VNH predice una sobre erosión del dique entre  $x = 0.75$  m y  $x = 0.9$  m, aproximadamente, que da lugar a una sobre-socavación del fondo. En el modelo SWE-SH, en cambio, la tasa de erosión es más alta en toda la cara aguas abajo del dique, lo que deja mayor cantidad de sedimento movilizado aguas abajo y permite amortiguar la socavación en el pie del dique. Sin embargo, la transición entre la zona erosiva y de depósito por el modelo SWE-SH sigue siendo brusca, dando lugar a perfiles erosionados del dique en discordancia con los datos experimentales.

## Presiones dinámicas en el fondo

La figura 6 muestra los valores de altura de presión en el fondo, es decir en la interfaz agua – capa granular, predichos por los modelos SWE, SWE-SH y VNH. Los modelos SWE y SWE-SH consideran distribución hidrostática de presiones y, por tanto, la altura de presión en  $z_b$  equivale al calado del flujo agua-sedimento ( $p_b/\gamma = h$ ). En cambio, el modelo VNH asume distribución lineal no-hidrostática, estimando la altura de presión en el fondo como:

$$\frac{p_b}{\gamma} = h + \frac{P_1}{\gamma} \quad (18)$$



**Figura 6** | Comparativa de las predicciones de presiones dinámicas en el fondo por los modelos SWE, SWE-SH y VNH para el test 55 de Schomcker (2011) en el instante  $t = 6$  s.

Los resultados de presión dinámica en  $z_b$  obtenidos con el modelo VNH, en comparación con los resultados de los modelos SWE y SWE-SH, muestran desviaciones en las inmediaciones de la cresta y el pie del dique (Figura 6). Cerca de la cresta del dique y aguas arriba, las presiones dinámicas predicen valores de altura de presión menores que las hidrostáticas, permitiendo el ajuste preciso de la solución de  $z_s$  con respecto a los datos experimentales como se comentó en las secciones previas. En esta zona, las diferencias en la concentración total de sedimento transportado son despreciables con respecto a los otros modelos. En el pie del dique, sin embargo, los valores de presión dinámica son notablemente superiores a los hidrostáticos, coincidiendo con el aumento de sedimento movilizado en comparación con el modelo SWE (Figura 5). En consecuencia, los resultados del modelo VNH se desvían de los datos experimentales en el pie del dique. Según Wu (2008), el desarrollo de presiones dinámicas produce una alteración de las condiciones erosivas en lechos móviles y, para una correcta estimación de las tasas de erosión, este efecto ha de ser integrado en las funciones experimentales que controlan las cargas de sedimento transportado. El modelo VNH, sin embargo, no incluye este efecto en su módulo de transporte de sedimentos, por lo que admite una potencial mejora.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un análisis comparativo entre los últimos avances en modelado promediado en la vertical de flujo sobre diques de materiales sueltos. Los modelos hidrodinámicos VNH (Cantero-Chinchilla et al., 2018) y SWE-SH (Cantero-Chinchilla et al., 2019) se han comparado con el modelo SWE presentado por van Emelen (2014). En primer lugar, las ecuaciones de gobierno para los tres modelos se han presentado en forma conservativa. Después, los datos experimentales del test 55 por Schomcker (2011) han sido usados para el análisis comparativo.

El análisis de resultados y la comparación con los datos experimentales han revelado la mejora de los resultados ofrecidos por los modelos SWE-SH y VNH en comparación con el modelo SWE. El modelo VNH predice con precisión los niveles aguas arriba y cerca de la cresta del dique de la superficie libre debido al estimador de presión no-hidrostática. Sin embargo, este modelo muestra una sobreestimación de la erosión de la capa granular al pie del dique aguas abajo en discordancia con los datos experimentales. Los resultados de concentración total del sedimento suspendido y presiones dinámicas indican que existe una correlación entre la movilidad del sedimento en el pie del dique aguas abajo y la sobrepresión no-hidrostática estimada por el modelo VNH. Esta

sobre-erosión ficticia propicia perfiles pronunciados en la capa granular erosionada que pueden superar los criterios de estabilidad del material. Por otro lado, el modelo SWE-SH predice perfiles erosionados que atienden a los criterios de estabilidad de la capa granular a través de las ecuaciones de Savage-Hutter, ayudando a predecir niveles más bajos de la cresta erosionada del dique que, a su vez, propician mejoras predictivas en la superficie libre.

Atendiendo a los resultados extraídos del análisis de los resultados comparativos, los futuros trabajos en esta línea de investigación pasan por la integración del movimiento dinámico de la capa granular y el estimador de presiones no-hidrostáticas, así como el efecto de la presión dinámica en la tasa de erosión. Además, fenómenos secundarios como la fluidificación del dique de materiales sueltos por efecto de la red de filtración o los efectos de escala en los ensayos de laboratorio, que podrían explicar algunas de las discrepancias de los modelos con respecto a los datos experimentales, han de ser explorados. A tal efecto, es deseable que esta comparativa se extienda a nuevos sets de datos sobre diques de materiales sueltos erosionados por vertido por coronación.

---

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades a través del proyecto de investigación CTM2017-85171-C2-1-R, el Programa Juan de la Cierva 2016 (FJCI-2016-28009) y el Programa Juan de la Cierva 2017 (FJCI-2017-31781).

---

## REFERENCIAS

- Aureli, F., Maranzoni, A., Mignosa, P., Ziveri, C. 2008. A weighted surface-depth gradient method for the numerical integration of the 2D shallow water equations with topography. *Advances in Water Resources*, 31(7), 962–974. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2008.03.005>
- BBC 2019. *Brazil dam: Startling pictures of Brumadinho collapse*. Retrieved from <https://www.bbc.com/news/world-latin-america-47096011>
- Bladé, E., Cea, L., Corestein, G., Escolano, E., Puertas, J., Vázquez-Cendón, E., Dolz, J., Coll, A. 2014. Iber: herramienta de simulación numérica del flujo en ríos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 30(1), 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.rimni.2012.07.004>
- Cantero-Chinchilla, F.N., Castro-Orgaz, O., Dey, S. 2019. Prediction of overtopping dike failure: a sediment transport and dynamic granular bed deformation model. *Journal of Hydraulic Engineering*, 145(6), 04019021, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HY.1943-7900.0001608](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001608)
- Cantero-Chinchilla, F. N., Castro-Orgaz, O., Schmocker, L., Hager, W.H., Dey, S. 2018. Depth-averaged modelling of granular dike overtopping. *Journal of Hydraulic Research*, 1–14. <https://doi.org/10.1080/00221686.2017.1399933>
- Castro-Orgaz, O., Hager, W.H. 2013. Unsteady Boussinesq-type flow equations for gradually-eroded beds: application to dike breaches. *Journal of Hydraulic Research*, 51(2), 203–208. <https://doi.org/10.1080/00221686.2012.739579>
- Castro-Orgaz, O., Hager, W.H. 2017. Non-hydrostatic free surface flows. *Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics*. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-47971-2>
- Cea, L., Bladé, E. (2015). A simple and efficient unstructured finite volume scheme for solving the shallow water equations in overland flow applications. *Water Resources Research*, 51(7), 5464–5486. <https://doi.org/10.1002/2014WR016547>
- Chaudhry, M.H. 2008. *Open-channel flow*, Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-68648-6>
- Green, A.E., Naghdi, P.M. 1976. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *Journal of Fluid Mechanics*, 78(2), 237–246. <https://doi.org/10.1017/S0022112076002425>

- Meyer-Peter, E., Müller, R. 1948. Formulas for bed-load transport. In *IAHSR 2nd meeting*, Stockholm, appendix 2. IAHR.
- Müller, C., Frank, P.J., Hager, W.H. 2016. Dyke overtopping: effects of shape and headwater elevation. *Journal of Hydraulic Research*, 54(4), 410–422. <https://doi.org/10.1080/00221686.2016.1170072>
- Pontillo, M., Schmocker, L., Greco, M., Hager, W.H. 2010. 1D numerical evaluation of dike erosion due to overtopping. *Journal of Hydraulic Research*, 48(5), 573–582. <https://doi.org/10.1080/00221686.2010.507005>
- Ricchiuto, M. 2010. On the C-property and generalized C-property of residual distribution for the shallow water equations. *Journal of Scientific Computing*, 48(1–3), 304–318. <https://doi.org/10.1007/s10915-010-9369-y>
- Savage, S.B., Hutter, K. 1989. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *Journal of Fluid Mechanics*, 199, 177–215. <https://doi.org/10.1017/S0022112089000340>
- Schmocker, L. 2011. *Hydraulics of dike breaching*. (PhD Thesis). ETH Zurich, Zürich.
- Schmocker, L., Hager, W.H. 2012. Plane dike-breach due to overtopping: Effects of sediment, dike height and discharge. *Journal of Hydraulic Research*, 50(6), 576–586. <https://doi.org/10.1080/00221686.2012.713034>
- Serre, F. 1953. Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux (Contribution to the study of steady and unsteady channel flows). *La Houille Blanche*, 8(6–7): 374–388 (in French). <https://doi.org/10.1051/lhb/1953034>
- Toro, E.F. 2009. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction*. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/b79761>
- Toro, E.F. 2001. *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. John Wiley.
- van Emelen, S. 2014. *Breaching processes of river dikes: effects on sediment transport and bed morphology* (PhD Thesis). Université Catholique de Louvain, Louvain-la Neuve.
- Wu, W. 2008. *Computational river dynamics*. Taylor and Francis, London, U.K. <https://doi.org/10.4324/9780203938485>